5.4. Графы

В этом разделе мы рассмотрим основные понятия, связанные с ориентированными и неориентированными графами. Следует иметь в виду, что терминология здесь не вполне устоялась и в разных книгах можно встретить разные определения, но по большей части различия невелики. Мы вернёмся к графам в главе 23, где рассматриваются различные алгоритмы на графах.

Ориентированный граф (directed graph) определяется как пара (V, E), где V — конечное множество, а E — бинарное отношение на V, т. е. подмножество множества $V \times V$. Ориентированный граф иногда для краткости называют **орграфом** (digraph). Множество V называют **множеством вершин** графа (vertex set); его элемент называют **вершиной** графа (vertex; множественное число vertices). Множество E называют **множеством рёбер** (edge set) графа; его элементы называют **рёбрами** (edges). На рис. 5.2(а) показан ориентированный граф с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Вершины изображены кружками, а рёбра — стрелками. Заметим, что граф может содержать **рёбра-циклы** (self-loops), соединяющие вершину с собой.

В **неориентированном** (undirected) графе $G = (V, E)$ множество рёбер E состоит из **неупорядоченных** (unordered) пар вершин: парами являются множества $\{u, v\}$, где $u, v \in V$ и $u \neq v$. Мы будем обозначать неориентированное ребро как (u, v) вместо $\{u, v\}$; при этом для неориентированного графа (u, v) и (v, u) обозначают одно и то же ребро. Неориентированный граф не может содержать рёбер-циклов, и каждое ребро состоит из двух различных вершин («соединяя» их). На рисунке 5.2(б) изображён неориентированный граф с множеством вершин $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Многие понятия параллельно определяются для ориентированных и неориентированных графов (с соответствующими изменениями). Про ребро (u, v) ориентированного графа говорят, что оно **выходит из** (incident from, leaves) вершины u и **входит** (incident to, enters) в вершину v. Например, на рис. 5.2(а)

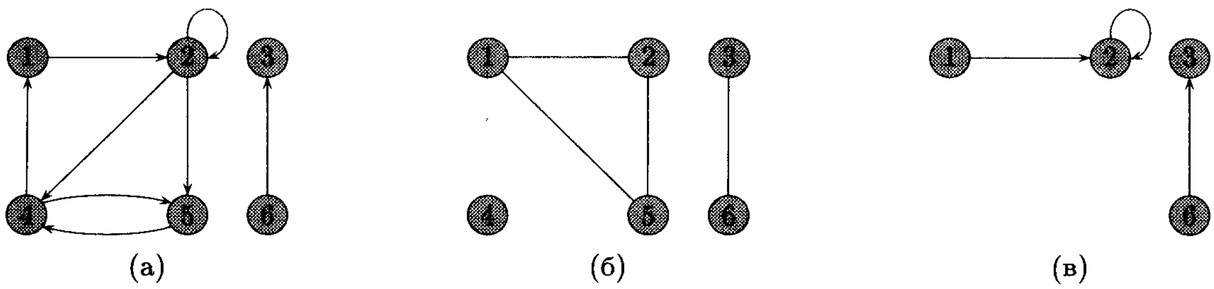

Рис. 5.2. Ориентированные и неориентированные графы. (а) Ориентированный граф (V, E), где $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $E = \{(1, 2), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 1), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$. Ребро $(2, 2)$ является ребром-циклом. (б) Неориентированный граф $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $E = \{(1, 2), (1, 5), (2, 5), (3, 6)\}$. Вершина 4 является изолированной (не имеет смежных вершин). (в) Подграф графа (а), получающийся его ограничением на множество вершин $\{1, 2, 3, 6\}$.

имеется три ребра, выходящих из вершины 2 (рёбра $(2,2)$, $(2,4)$, $(2,5)$) и два ребра, в неё входящих (рёбра $(1,2)$, $(2,2)$). Про ребро (u,v) неориентированного графа говорят, что оно **инцидентно вершинам** (incident on vertices) u и v. Например, на рис. 5.2(б) есть два ребра, инцидентные вершине 2 (рёбра $(1,2)$ и $(2,5)$).

Если в графе G имеется ребро (u,v), говорят, что вершина v **смежна с вершиной** u (is adjacent to u). Для неориентированных графов отношение смежности является симметричным, но для ориентированных графов это не обязательно. Если вершина v смежна с вершиной u в ориентированном графе, пишут $u \to v$. Для обоих рисунков 5.2(а) и 5.2(б) вершина 2 является смежной с вершиной 1, но лишь во втором из них вершина 1 смежна с вершиной 2 (в первом случае ребро $(2,1)$ отсутствует в графе).

Степенью (degree) вершины в неориентированном графе называется число инцидентных ей рёбер. Например, для графа на рис. 5.2(б) степень вершины 2 равна 2. Для ориентированного графа различают **исходящую степень** (out-degree), определяемую как число выходящих из неё рёбер, и **входящую степень** (in-degree), определяемую как число входящих в неё рёбер. Сумма исходящей и входящей степеней называется **степенью** (degree) вершины. Например, вершина 2 в графе на рис. 5.2(а) имеет входящую степень 2, исходящую степень 3 и степень 5.

Путь длины k (path of length k) из вершины u в вершину v определяется как последовательность вершин $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, в которой $v_0 = u$, $v_k = v$ и $(v_{i-1}, v_i) \in E$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Таким образом, путь длины k состоит из k рёбер. Этот путь **содержит** (contains) вершины $v_0, v_1, \ldots, v_k$ и рёбра (v_0, v_1), $(v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$. Вершину v_0 называют **началом** пути, вершину v_k — его **концом**; говорят, что путь ведёт **из** v_0 **в** v_k (from v_0 to v_k). Если для данных вершин u и u' существует путь p из u в u', то говорят, что вершина u' **достижима из** u **по пути** p (u' is reachable from u via p). В этом случае мы пишем (для ориентированных графов) $u \overset{p}{\leadsto} u'$.

Путь называется **простым** (simple), если все вершины в нём различны. Например, на рис. 5.2(а) есть простой путь $\langle 1,2,5,4 \rangle$ длины 3, а также путь $\langle 2,5,4,5 \rangle$ той же длины, не являющийся простым.

Подпуть (subpath) пути $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ получится, если мы возьмём некоторое количество идущих подряд вершин этого пути, т. е. последовательность $\langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ при некоторых i, j, для которых $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.

Циклом (cycle) в ориентированном графе называется путь, в котором начальная вершина совпадает с конечной и который содержит хотя бы одно ребро. Цикл $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ называется **простым** (simple), если в нём нет одинаковых вершин (кроме первой и последней), т.е. если все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$ различны. Ребро-цикл является циклом длины 1. Мы отождествляем циклы, отличающиеся сдвигом вдоль цикла: один и тот же цикл длины k может быть представлен k различными путями (в качестве начала и конца можно взять любую из k вершин). Например, на рис. 5.2(а) пути $\langle 1,2,4,1 \rangle$, $\langle 2,4,1,2 \rangle$ и $\langle 4,1,2,4 \rangle$ представляют один и тот же цикл. Этот цикл является простым, в то время как цикл $\langle 1, 2, 4, 5, 4, 1\rangle$ таковым не является. На том же рисунке есть цикл $\langle 2, 2\rangle$, образованный единственным ребром-циклом $(2, 2)$. Ориентированный граф, не содержащий рёбер-циклов, называется **простым** (simple).

В неориентированном графе путь $\langle v_0, v_1, \ldots, v_k\rangle$ называется (простым) **циклом**, если $k \geqslant 3$, $v_0 = v_k$ и все вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$ различны. Например, на рис. 5.2(б) имеется простой цикл $\langle 1, 2, 5, 1\rangle$.

Граф, в котором нет циклов, называется **ациклическим** (acyclic).

Неориентированный граф называется **связным** (connected), если для любой пары вершин существует путь из одной в другую. Для неориентированного графа отношение «быть достижимым из» является отношением эквивалентности на множестве вершин. Классы эквивалентности называются **связными компонентами** (connected components) графа. Например, на рис. 5.2(б) имеются три связные компоненты: $\{1, 2, 5\}$, $\{3, 6\}$ и $\{4\}$. Неориентированный граф связен тогда и только тогда, когда он состоит из единственной связной компоненты.

Ориентированный граф называется **сильно связным** (strongly connected), если из любой его вершины достижима (по ориентированным путям) любая другая. Любой ориентированный граф можно разбить на **сильно связные компоненты** (strongly connected components), которые определяются как классы эквивалентности отношения «u достижимо из v и v достижимо из u». Ориентированный граф сильно связен тогда и только тогда, когда состоит из единственной сильно связной компоненты. Граф на рис. 5.2(а) имеет три таких компоненты: $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{3\}$ и $\{6\}$. Заметим, что вершины $\{3, 6\}$ не входят в одну сильно связную компоненту, так как 3 достижима из 6, но не наоборот.

Два графа $G = (V, E)$ и $G' = (V', E')$ называются **изоморфными** (isomorphic), если существует взаимно однозначное соответствие $f\colon V \to V'$ между множествами их вершин, при котором рёбрам одного графа соответствуют рёбра другого: $(u, v) \in E$ тогда и только тогда, когда $(f(u), f(v)) \in E'$. Можно сказать, что изоморфные графы — это один и тот же граф, в котором вершины названы по-разному. На рис. 5.3(а) приведён пример двух изоморфных графов G и G' с множествами вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $V' = \{u, v, w, x, y, z\}$. Функция $f\colon V \to V'$, для которой $f(1) = u$, $f(2) = v$, $f(3) = w$, $f(4) = x$, $f(5) = y$, $f(6) = z$, является изоморфизмом. Напротив, графы на рис. 5.3(б) не изоморфны, хотя оба имеют по 5 вершин и по 7 рёбер. Чтобы убедиться, что они не изоморфны, достаточно отметить, что в верхнем графе есть вершина степени 4, а в нижнем — нет.

Граф $G' = (V', E')$ называют **подграфом** (subgraph) графа $G = (V, E)$, если $E' \subseteq E$ и $V' \subseteq V$. Если в графе $G = (V, E)$ выбрать произвольное множество вершин V', то можно рассмотреть его подграф, состоящий из этих вершин и всех соединяющих их рёбер, т. е. граф $G' = (V', E')$, для которого

$$E' = \{(u, v) \in E : u, v \in V'\}.$$

Этот подграф можно назвать **ограничением** графа G на множество вершин V' (subgraph of G induced by V'). Ограничение графа рис. 5.2(а) на множество вершин $\{1, 2, 3, 6\}$ показано на рис. 5.2(в) и имеет три ребра $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(6, 3)$.

Для любого неориентированного графа G можно рассмотреть его **ориентированный вариант** (directed version), заменив каждое неориентированное ребро

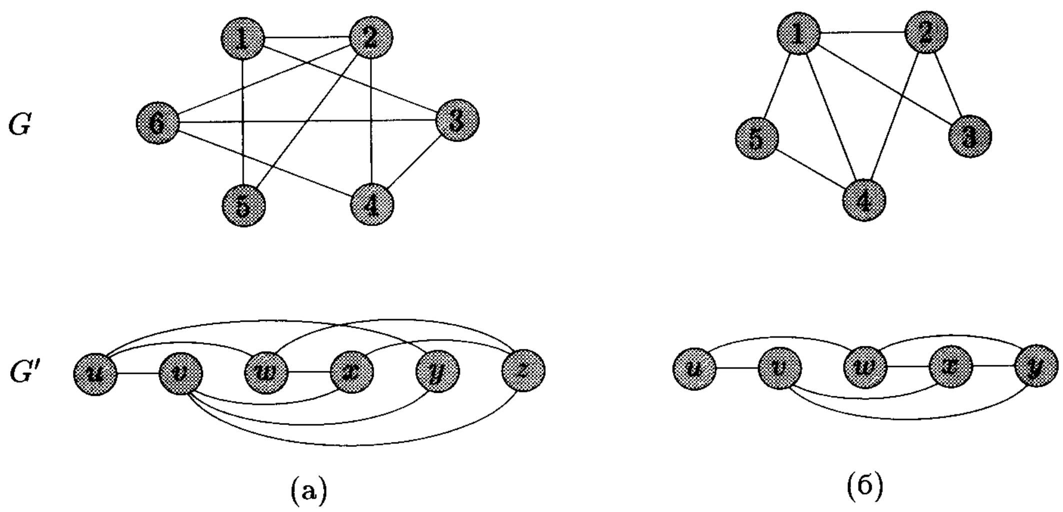

Рис. 5.3. (а) Пара изоморфных графов. (б) Неизоморфные графы: верхний имеет вершину степени 4, а нижний — нет.

$\{u, v\}$ на пару ориентированных рёбер (u, v) и (v, u), идущих в противоположных направлениях. С другой стороны, для каждого ориентированного графа можно рассмотреть его **неориентированный вариант** (undirected version), забыв про ориентацию рёбер, удалив рёбра-циклы и соединив рёбра (u, v) и (v, u) в одно неориентированное ребро $\{u, v\}$. В ориентированном графе **соседом** (neighbor) вершины u называют любую вершину, соединённую с ней ребром (в ту или другую сторону); таким образом, v является соседом u тогда и только тогда, когда v смежно u или u смежно v. Для неориентированного графа выражения «v — сосед u» и «v смежна с u» являются синонимами.

Некоторые виды графов имеют специальные названия. **Полным** (complete) графом называют неориентированный граф, содержащий все возможные рёбра для данного множества вершин (любая вершина смежна любой другой). Неориентированный граф (V, E) называют **двудольным** (bipartite), если множество вершин V можно разбить на две части V_1 и V_2 таким образом, что концы любого ребра оказываются в разных частях. Ациклический неориентированный граф называют **лесом** (forest), а связный ациклический неориентированный граф называют **деревом без выделенного корня** (подробно деревья рассматриваются в следующем разделе). По-английски дерево без выделенного корня называется free tree. Ориентированный ациклический граф (directed acyclic graph) по-английски часто сокращают до «dag» (по первым буквам).

Иногда рассматривают обобщения понятия графа. Например, можно рассматривать **мультиграф** (multigraph), который похож на неориентированный граф, но может содержать много рёбер, соединяющих одну и ту же пару вершин, а также рёбра-циклы. **Гиперграф** (hypergraph) отличается от неориентированного графа тем, что он содержит **гиперрёбра** (hyperedges), соединяющие не две вершины, а произвольное множество вершин. Многие алгоритмы обработки обычных графов могут быть обобщены на такие графоподобные структуры.